



Síntese Computacional de Fenômenos Naturais: Geometria Fractal e Vida Artificial Parte 2: Síntese de Formas

Danilo Mattos Bonfim¹
Leandro Nunes de Castro¹

1. Introdução

Muitos objetos conhecidos e que vemos no dia a dia podem ser descritos através de formas ‘ideais’, como retângulos, cilindros, cones ou esferas. Objetos, como um livro ou um lápis, possuem uma geometria tão simples e bem definida que qualquer pessoa consegue facilmente descrever suas formas. A maioria dos objetos desenvolvidos pelo homem pode ser facilmente descrita por um conjunto de formas (Euclidianas) básicas, mas o que dizer dos objetos encontrados natureza? Quem é capaz de descrever a forma de uma árvore, de uma montanha ou de um floco de neve?

Desde que Euclides, famoso matemático da Grécia Antiga, desenvolveu a hoje chamada *geometria Euclidiana*, as pessoas se satisfizeram com a idéia de que todos os objetos podem ser descritos através de composições de formas regulares simples. Ele definiu a natureza como um conjunto de formas regulares básicas, como linhas, retângulos, cones e triângulos. Entretanto, é visível que as formas ideais de Euclides apenas tentam fazer uma aproximação, na maioria dos casos grosseira, da realidade dos objetos naturais. É claro que na época de Euclides, por volta de 300 A.C., e até poucos

¹ Laboratório de Sistemas Inteligentes (LSIn), Universidade Católica de Santos (Unisantos), Programa de Mestrado em Informática. Yupanqui Julho Muñoz munoz@lsin.unisantos.br; Leandro Nunes de Castro lnunes@unisantos.br.

anos atrás, isto era aceitável. Porém, os recentes avanços da computação e da matemática levaram ao surgimento de novas técnicas capazes de descrever com maior exatidão e realismo os padrões encontrados na natureza.

Na primeira parte deste artigo foi feita uma discussão sobre a Vida Artificial como uma linha de pesquisa que se ocupa, dentre outras coisas, da síntese computacional de comportamentos exibidos por organismos naturais. Esta parte do artigo enfatiza o uso da geometria fractal como ferramenta para a síntese de formas encontradas na natureza, como plantas, montanhas, regiões costeiras, fogo e outras. Para isso, primeiramente será feita uma explanação do significado da geometria fractal, serão apresentadas algumas formas matemáticas que motivaram o desenvolvimento da teoria de fractais e será apresentado o conceito de dimensão fractal. Em seguida serão discutidos e ilustrados três algoritmos para a síntese de fractais. Este trabalho é concluído com uma listagem das principais áreas de aplicação de fractais além da síntese de fenômenos naturais.

2. *Geometria Fractal*

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, a casca de uma árvore não é suave, nem mesmo a luz caminha em linha reta. A existência destes padrões nos desafia a estudar estas formas que Euclides deixou para trás como sendo ‘sem forma’, para investigar a morfologia do amorfo” (Mandelbrot, 1982; p. 1). Está claro que objetos ideais de Euclides são exceções na natureza. Fez-se então necessário criar uma nova maneira para tratar o problema levando em conta as diversas peculiaridades das estruturas irregulares da natureza.

O matemático polonês, Benoît Mandelbrot, propôs, em 1975 o termo *fractal* para identificar as classes de objetos rugosos, quebrados e aparentemente sem forma que reinam absolutamente no mundo em que vivemos. O termo fractal tem sua origem na palavra ‘*fractus*’ do Latim, que significa ‘quebrado’. “A ‘geometria fractal’ é a geometria das formas irregulares que encontramos na nature-

za...” (Mandelbrot, 1982). A geometria fractal consiste em uma extensão da geometria Euclidiana tradicional. Ela não a substitui, e sim a enriquece, trazendo a possibilidade de descrever com precisão objetos diretamente relevantes para a compreensão do mundo real. A geometria fractal pode ser vista como um novo idioma ou uma nova linguagem, uma vez que você o fale, torna-se possível descrever a forma de uma nuvem com a mesma precisão da arquitetura de uma casa (Lesmoir-Gordon *et al.*, 2000). A Figura 1 ilustra alguns fractais comuns na natureza.

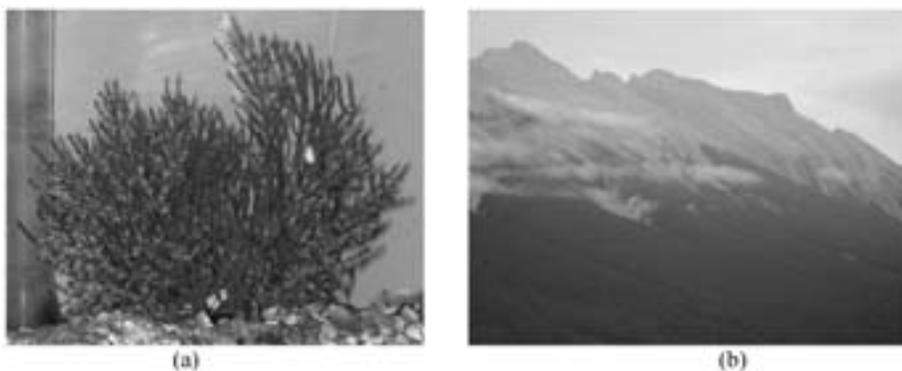


Figura 1: Exemplos de fractais na natureza. (a) Planta marinha. (b) Montanhas.

Em geral, os fractais são caracterizados por detalhes infinitos, tamanho infinito, ausência de suavidade e derivadas, auto-similaridade e dimensão fractal. Um bom exemplo de fractal é uma planta, como a mostrada na Figura 2. Note que se um pequeno galho for retirado da planta inteira, este se parece muito com ela. Se este procedimento for repetido sucessivamente para cada galho resultante, todos eles se parecerão com o todo, porém, em uma escala menor. Esta característica é conhecida como *auto-similaridade* e é uma propriedade intrínseca aos fractais. Apesar de ser comumente encontrada na natureza, esta propriedade não é observada na maioria dos objetos Euclidianos. Por exemplo, um arco de um círculo não é sozinho um círculo, um lado de um triângulo é uma reta e não um triângulo. Há dois tipos principais de auto-similaridade (Hutchinson, 1981):

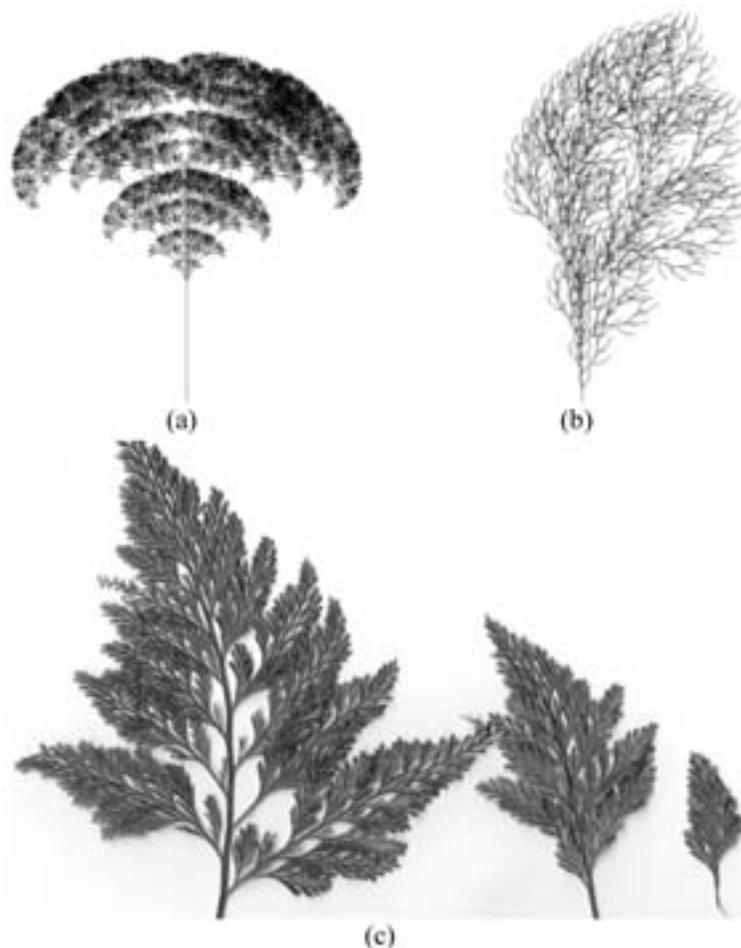


Figura 2: Auto-similaridade de uma planta. (a) Auto-similaridade estrita. (b) Auto-afinidade. (c) Planta real ilustrando a auto-afinidade. As plantas menores à direita da planta maior são ramos da mesma.

- *Auto-similaridade estrita*: Quando o objeto é composto por cópias escalonadas idênticas de si mesmo.
- *Auto-afinidade*: Quando o objeto é formado por cópias menores, mas com uma pequena variação em relação ao todo (Mandelbrot, 1985).

A Figura 2 ilustra a auto-similaridade estrita e a auto-afinidade através de plantas sintéticas geradas por sistemas-L a serem descritos posteriormente, e de plantas naturais.

2.1. Fractais Pioneiros

Os primeiros fractais foram descobertos por K. Weierstrass, G. Cantor, H. Von Koch e outros matemáticos no início do século XIX. Eles foram chamados inicialmente de *monstros matemáticos*, devido à estranhas propriedades que apresentavam. Para entendê-las, vejamos, por exemplo, a curva de Koch, introduzida por H. Von Koch em 1904 (Figura 3). Para obtê-la, pegue uma linha, remova o terço central. Pegue dois segmentos idênticos ao terço retirado e coloque-os lado a lado construindo um triângulo equilátero sem a base. Repita este procedimento para cada segmento da curva resultante infinitas vezes.

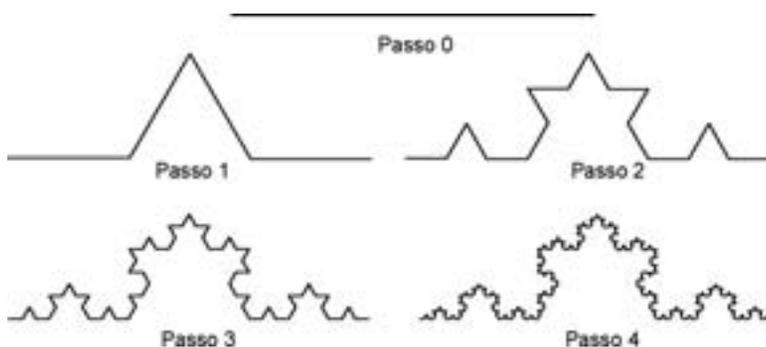


Figura 3: Os quatro primeiros passos para a construção da curva de Koch.

Olhando para a curva de Koch não é difícil entender certas propriedades dos fractais. Note que, enquanto o tamanho dos segmentos tende a zero, seu comprimento tende ao infinito. Isto quer dizer que, no limite, não há segmento de reta algum, isto é, a curva é formada apenas por cantos. Portanto, não é possível achar uma tangente (derivada) para ponto algum da curva, pois ela não é suave em parte alguma. Outro aspecto intrigante é que, apesar desta curva ter tamanho infinito, ela pode ser colocada dentro de um espaço finito (p. ex., um retângulo).

Um outro exemplo clássico de ‘monstro matemático’ é a *curva de Peano*, apresentada por G. Peano no fim do século XIX. Esta

curva é desenhada em um plano e é capaz de preencher o espaço, ou seja, dada uma parte do plano, a curva passa por todos os pontos daquela parte, demonstrando limitações dos nossos conceitos de curva. Isso é conseguido construindo uma curva que se dobra de forma tão complexa que visita todos os pontos do plano. Estas curvas são denominadas de *curvas que preenchem o espaço* (*space filling curve*). Para desenhar a curva de Peano, toma-se inicialmente um segmento de reta e, a cada passo do processo construtivo, todos os segmentos do passo anterior são substituídos por uma curva que consiste de nove segmentos menores, como ilustrado na Figura 4.

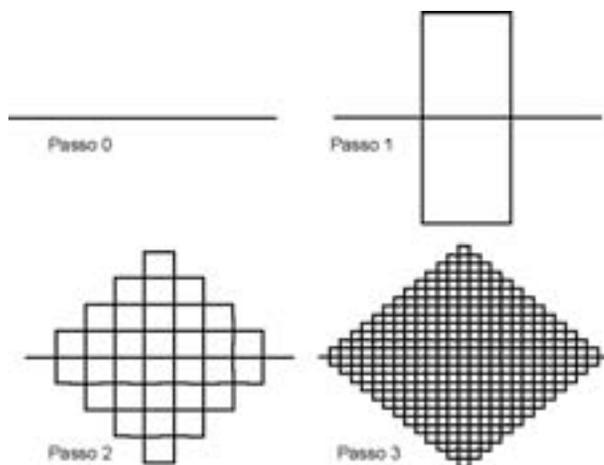


Figura 4: Primeiros passos de construção da curva de Peano.

2.2. Dimensão Fractal

Todos nós aprendemos que pontos possuem dimensão zero, linhas e curvas são unidimensionais, quadrados e retângulos são bidimensionais e um cubo ou esfera é tridimensional. Esta noção de dimensão que vincula a dimensão de um objeto ao número de coordenadas necessárias para descrevê-lo é chamada de dimensão topológica (de Castro, 2006). Dentro da noção de dimensão topológica não há distinção entre, por exemplo, a curva de Koch (Figura 3) e um segmento de reta. Será que é possível dizer que a curva de Koch é unidimensional, sendo que a distância entre quaisquer dois de seu pontos é infinita? Ela é complexa demais para ter dimensão

um, como uma linha, mas também não é ‘grande’ o suficiente para ter dimensão dois, pois ela não é capaz de preencher um plano. Mas afinal, qual é a dimensão de um fractal? Percebe-se que a dimensão topológica não é capaz de definir a dimensão de um fractal. Talvez a curva de Koch possa ter uma dimensão entre um e dois. Fractais não possuem dimensão topológica e sim uma *dimensão fractal*, na qual o valor desta dimensão é diretamente proporcional ao seu grau de complexidade.

Para chegar à dimensão fractal, é possível começar analisando objetos regulares, como os Euclidianos. Já que suas dimensões são conhecidas, é possível aplicar-lhes o conceito de auto-similaridade para observar como se comportam. Podemos assumir que o número de cópias de um objeto é dado pela seguinte expressão:

$$N = (1/m)^d, \quad (1)$$

onde N é o número de cópias auto-similares, m é o fator de redução (tamanho da cópia em relação ao objeto original), e d é a dimensão do objeto.

Por exemplo, veja o quadrado, que tem dimensão dois. Assumindo que cada cópia tem a metade do tamanho do quadrado original, temos $m = 1/2$. Substituindo na Equação (1), temos:

$$N = \left(\frac{1}{1/2}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Portanto, são obtidas quatro cópias de um objeto de dimensão dois quando o tamanho de cada cópia tem metade do tamanho do objeto original. A Figura 5 ilustra esta relação para outras dimensões e com outros fatores de redução.

Portanto, se o objetivo é encontrar uma regra geral para saber a dimensão dos objetos auto-similares, é necessário isolar o parâmetro d do restante da equação, como a seguir:

$$N = (1/m)^d \Rightarrow \log(N) = \log((1/m)^d) \Rightarrow \log(N) = d \cdot \log(1/m) \Rightarrow d = \frac{\log(N)}{\log(1/m)}$$

Assim, a *dimensão auto-similar* é dada pela equação a seguir:

$$d = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{m})} \tag{2}$$

Considerando novamente o exemplo da curva de Koch, cada segmento da curva transforma-se em quatro cópias idênticas, porém com um terço do tamanho original cada uma. Tem-se, então:

$$d = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{m})} \Rightarrow d = \frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{3})} \Rightarrow d \cong 1,26$$

Assim, a dimensão da curva de Koch é aproximadamente 1,26.

Em 1919 F. Hausdorff estendeu a noção de dimensão de auto-similaridade, dada pela Eq. (2), para cobrir todas as formas, não

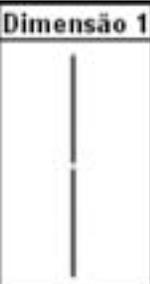
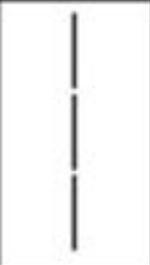
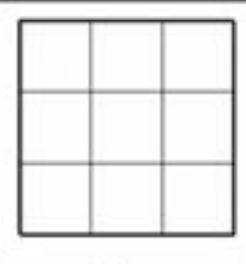
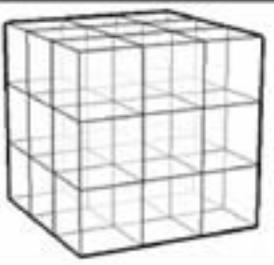
	Dimensão 1	Dimensão 2	Dimensão 3
Dividido por 2			
Cópias	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
Dividido por 3			
Cópias	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$

Figura 5: Quantidade de objetos auto-similares obtidos para uma, duas e três dimensões considerando os fatores de redução $m = 1/2$ e $m = 1/3$.

apenas aquelas estritamente auto-similares. Esta dimensão fractal descreve a complexidade de um objeto. A dimensão 1 significa suavidade total da forma (p. ex., linha reta) e a complexidade de um fractal aumenta a medida em que sua dimensão aumenta. Este conceito é importante para podermos sintetizar um fractal computacionalmente. Por exemplo, a costa marinha da Inglaterra possui dimensão fractal 1,26, aproximadamente a mesma da curva de Koch (Lesmoir-Gordon *et al.*, 2000).

3. *Fractais para a Síntese de Formas e Fenômenos Naturais*

Os conceitos envolvidos no estudo da geometria fractal facilitam o entendimento e a síntese de formas naturais. O objetivo desta sessão é introduzir o uso de fractais para a síntese de fenômenos naturais, através de alguns casos de estudo de modelagem de arquitetura de plantas. Também serão brevemente discutidas outras técnicas de geometria fractal para modelagem de montanhas e fogos de artifício.

3.1. *Plantas, Árvores e Arbustos*

Agregando os conhecimentos básicos de botânica com os da geometria fractal é possível desenvolver modelos de arquiteturas de plantas e árvores, assim como simular seu crescimento computacionalmente. Os *sistemas de Lindenmayer*, mais conhecidos como *Sistemas-L* (Lindenmayer, 1968), foram introduzidos pelo biólogo Aristid Lindenmayer como um formalismo matemático para descrever o desenvolvimento de plantas. Lindenmayer introduziu uma notação em forma de cadeia de caracteres que armazena informações sobre crescimento (desenvolvimento) e são interpretadas formando uma figura geométrica que representa um modelo de uma planta. Apesar das limitações iniciais da técnica, seus avanços contínuos tornaram os sistemas-L uma poderosa ferramenta para modelagem de plantas.

A idéia básica dos sistemas-L está contida nos *sistemas de re-escritura*. Um sistema de re-escritura é uma técnica de define objetos complexos partindo de um objeto simples inicial (*iniciador*) e um conjunto *geradores* ou *regras de produção*. Este processo consiste

em substituir o objeto inicial por cópias idênticas de seus geradores e assim sucessivamente por um número finito de passos, para cada objeto obtido. Sua dinâmica se assemelha à dinâmica de construção da curva de Koch (Figura 3), porém com a possibilidade de múltiplos geradores serem aplicados simultaneamente. Um exemplo de sistema de re-escritura é apresentado na Figura 6, onde temos um iniciador A , dois geradores $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow AB$, e o alfabeto $\{A, B, C\}$, que consiste em todos os símbolos que fazem parte do sistema. A cada passo do sistema é obtida uma nova palavra, que consiste na combinação dos símbolos do alfabeto de acordo as *regras de produção*.

Passo	Palavras Obtidas
0	A
1	B
2	AB
3	BAB
4	$ABBAB$
5	$BABABBAB$

Figura 6: Exemplo de um sistema de re-escritura.

Partindo para uma definição um pouco mais formal, um sistema-L tipicamente é dado pela tripla $S = \langle \omega, \Sigma, P \rangle$, onde Σ corresponde a um alfabeto, ω um axioma ou iniciador não nulo e P um conjunto finito de regras de produção (geradores). Sendo uma regra de produção $(A, \chi) \in P$, ela pode ser representada por $A \rightarrow \chi$ que são, respectivamente, o antecessor (letra à qual a regra é associada) e o sucessor (letra resultante da aplicação da regra) da produção. Assume-se também que, para cada elemento do alfabeto, há uma regra de produção específica. Se não há uma regra explicitamente especificada para uma letra A qualquer do alfabeto, assume-se então que $A \rightarrow A$.

Considere um sistema-L com o alfabeto $\Sigma = \{F, G, +, -, [,]\}$, $\omega = F$ e $P = \{P_1, P_2\}$. Este sistema está sendo representado na Figura 7. Cada tipo de seta é representado por uma letra, por exemplo, F para seta sólida e G para seta pontilhada. A regra $P_1 = F \rightarrow FF$ está associada a F , enquanto $P_2 = G \rightarrow F[+G]F[-G]G$ está associada a G .

Os símbolos são interpretados por um algoritmo chamado *gráfico tartaruga* (Szilard & Quinton, 1979). Ele consiste em um agente

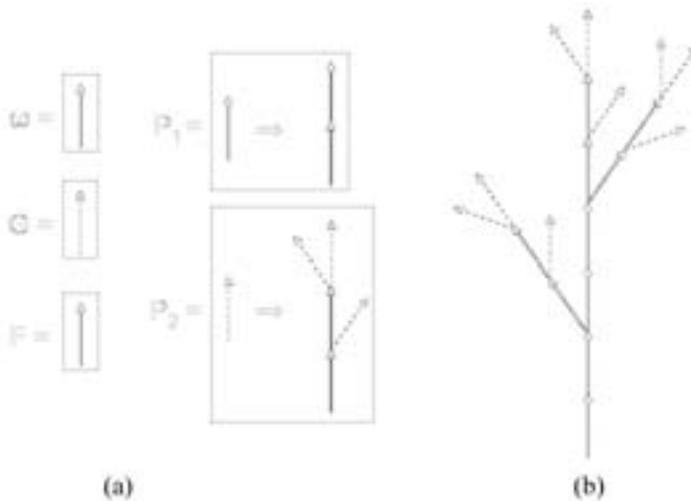


Figura 7: Exemplo do funcionamento de um sistema-L. (a) Alfabeto, axioma e regras de produção. (b) Resultado do sistema-L para duas iterações.

(chamado de tartaruga) que assume uma posição e direção no espaço e é capaz de desenhar objetos nele. Portanto, os símbolos $\{+, -, [,]\}$ são adicionados ao alfabeto para possibilitar uma interpretação geométrica ou pictórica para as palavras geradas. Os símbolos F e G são os símbolos que possibilitam o desenho das setas, onde F representa uma seta sólida, e G representa uma seta pontilhada; os símbolos $+$ e $-$ possibilitam a mudança de direção de uma seta, para direita ou para esquerda, respectivamente; enquanto os colchetes '[' e ']' permitem a ramificação da planta, ou seja, a confecção de sub-galhos.

Partindo deste formalismo simplificado é possível criar as formas básicas da estrutura de uma planta como as demonstradas na Figura 2(a) e (b). Ainda com base nestas idéias, muitos outros modelos, com a ajuda de um tratamento gráfico adequado, permitem gerar modelos realísticos e sofisticados das mais diversas plantas. Alguns exemplos são ilustrados na Figura 8.

3.2. Montanhas e Fogos de Artifício

Considere inicialmente um fenômeno chamado *caminhada aleatória* (*random walk*). Uma caminhada aleatória é uma caminhada



Figura 8: Modelos gerados por Sistema-L. (a) Passos do desenvolvimento de uma planta com flores. (b) Arbusto.

que pode ser gerada por um processo aleatório da seguinte forma. Tome as coordenadas x e y de um objeto e adicione a cada um destes valores um passo aleatório Δx e Δy , respectivamente:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \Delta x \\ y(t+1) &= y(t) + \Delta y, \end{aligned} \quad (3)$$

Se este processo for repetido por um número de passos, então o resultado é uma caminhada aleatória, como ilustrado na Figura 9(a). Esta caminhada aleatória está intimamente relacionada com *movimento Browniano*, que é encontrado no movimento de partículas em líquidos e gases, e com *ruído branco*, normalmente usado para descrever outros fenômenos do tipo caminhada aleatória.

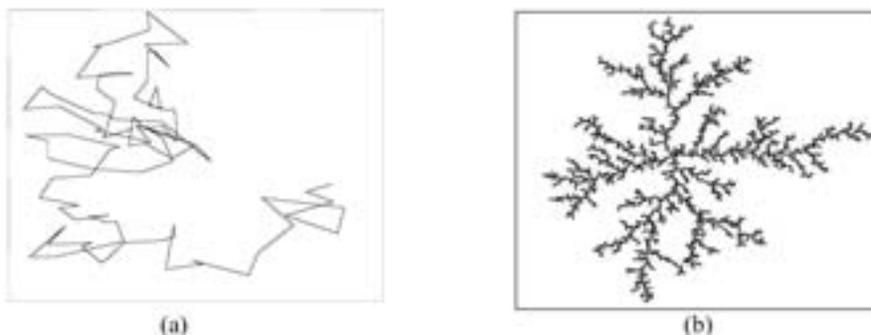


Figura 9: Caminhada aleatória e agregação limitada por difusão. (a) Caminhada aleatória: 100 passos. (b) Agregação limitada por difusão: 2.500 partículas.

Considere agora um experimento que resulta em uma *estrutura fractal dendrítica aleatória* correspondente a um processo de agregação eletroquímica. Um modelo matemático deste processo de agregação é baseado em uma extensão do movimento Browniano, denominada de *movimento Browniano fracionário*. Com estas ferramentas em mãos, é possível sintetizar computacionalmente paisagens, regiões costeiras, etc.

O fenômeno de agregação por deposição eletroquímica é bastante investigado em geometria fractal (Matsushita, 1989). Experimentalmente, o processo de eletro-decomposição controlada pode ser usado para crescer depósitos que exibem estruturas fractais. Por exemplo, colocando uma solução de sulfato de zinco coberta por uma fina camada de acetato-*n*-butyl em uma placa de Petri e aplicando uma tensão contínua ao conjunto é possível verificar o crescimento de estruturas fractais de eletro-depósito e suas variações morfológicas.

A modelagem matemática do processo de depósito eletroquímico do zinco é baseada no conceito central de movimento Browniano, que se refere ao movimento errático de pequenas partículas de matéria sólida em uma suspensão líquida (Peitgen *et al.*, 1992). Uma técnica simples para a simulação deste tipo de movimento Browniano é conhecida como *agregação limitada por difusão* (*diffusion limited aggregation - DLA*) e foi introduzida por Witten & Sandler (1981). Esta técnica opera da seguinte forma: *i*) gere uma grade (*grid*) quadrada de células; *ii*) fixe uma única célula (partícula) no centro da grade; *iii*) selecione uma posição na vizinhança da célula e introduza uma partícula em movimento aleatório; *iv*) se a partícula em movimento sair da vizinhança, então uma nova partícula aleatória é gerada, senão, se ela encontrar uma célula fixa, ela se fixa a esta última. Um resultado de um DLA com 2.500 partículas é apresentado na Figura 9(b).

Mandelbrot & van Ness (1968) introduziram o termo *movimento Browniano fracionário* (fBm) para referenciar uma família de funções Gaussianas aleatórias capazes de fornecer modelos de

diversas séries temporais encontradas na natureza. Desde então, muitas extensões e aproximações foram desenvolvidas para modelar fenômenos naturais, de paisagens a nuvens. O movimento Browniano fracionário é uma generalização do movimento Browniano, definido como um processo aleatório $X(t)$ com incrementos Gaussianos e

$$\text{var}(X(t_2) - X(t_1)) \propto |t_2 - t_1|^{2H} \quad (4)$$

onde $0 < H < 1$, $\text{var}(\cdot)$ corresponde à variância da distribuição Gaussiana e t_i refere-se ao instante de tempo i .

No caso mais geral, os incrementos de X são estatisticamente auto-similares, com parâmetro H , no sentido de que

$$X(t_0 + t) - X(t_0) \text{ e } \frac{X(t_0 + rt) - X(t_0)}{r^H} \quad (5)$$

têm a mesma função de distribuição conjunta finita para quaisquer t_0 e $r > 0$.

Um método popular para gerar movimento Browniano é dado por um algoritmo denominado *algoritmo da sub-divisão recursiva*, também conhecido por *algoritmo do deslocamento aleatório do ponto médio* (Fournier *et al.*, 1982). A operação do algoritmo é bastante simples. Seja um processo aleatório $X(t)$. Inicie com $t = 0$ e escolha $X(1)$ como uma amostra de uma distribuição Gaussiana de média zero e variância σ^2 . Na primeira iteração o ponto médio entre $t = 0$ e $t = 1$ é determinado como a média de $X(0)$ e $X(1)$ mais um deslocamento D_1 de média zero e variância Δ_1^2 . No caso de movimento Browniano fracionário, o deslocamento do ponto médio deve obedecer a seguinte variância:

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{(2^n)^{2H}} (1 - 2^{2H-2}) \quad (6)$$

onde o parâmetro H , denominado de expoente de Hurst, determina a rugosidade da superfície a ser gerada. A Figura 10 ilustra a utilização de movimento Browniano fracionário para a geração de paisagens montanhosas. No caso (a) é gerada uma espécie de

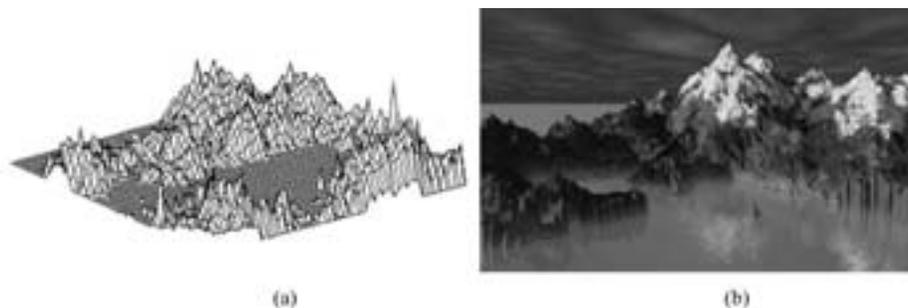


Figura 10: Exemplo de estruturas criadas utilizando movimento Browniano. (a) Esqueleto de uma área montanhosa com um nível mínimo indicando a presença de regiões alagadas. (b) Paisagem gerada com fBm após tratamento gráfico.

‘esqueleto’ de uma paisagem, enquanto no caso (b) o esqueleto é submetido a um processo de tratamento gráfico, resultando em imagens com elevado grau de realismo.

Para sintetizar fenômenos naturais como fogo, explosões e cachoeiras, é necessária uma técnica que não leve em conta apenas a estrutura dos objetos, mas também sua dinâmica. Os *sistemas de partículas* é uma técnica utilizada para simular fenômenos naturais que possuem uma determinada dinâmica, como água em movimento, fogo, chuva, neve, fogos de artifício, etc. (Reeves, 1983). Um sistema de partículas é uma coleção de objetos primitivos, conhecidos como *partículas*, que em conjunto representam algum objeto. Os sistemas de partículas possuem três características que os diferem da maioria das abordagens para a síntese de imagens: *i*) um padrão ou forma é representado por uma coleção (enxame) de partículas; *ii*) as partículas são dinâmicas; e *iii*) um padrão representado pelas partículas não é determinístico, ou seja, sua forma não é completamente pré-especificada.

Uma partícula é modelada através da definição de atributos, como peso, forma, tamanho, velocidade, cor, transparência e tempo de vida. Quando uma certa quantidade de partículas é inserida no sistema e uma dinâmica é determinada, o comportamento geral do sistema é capaz de simular diversos fenômenos. Por exemplo, considere um modelo de simulação de fogos de artifício. Ao lançar-

mos uma partícula com um determinado ângulo de inclinação em relação ao eixo vertical e com uma velocidade inicial pré-especificada, deveremos considerar a atuação de uma força gravitacional na partícula que promoverá um movimento parabólico da mesma. Depois de um certo tempo do lançamento, a partícula poderá ser substituída por um conjunto de partículas menores, também sujeitas a ação da gravidade, que representarão a explosão do fogo de artifício. A Figura 11 ilustra um sistema de partículas simulando um fogo de artifício.

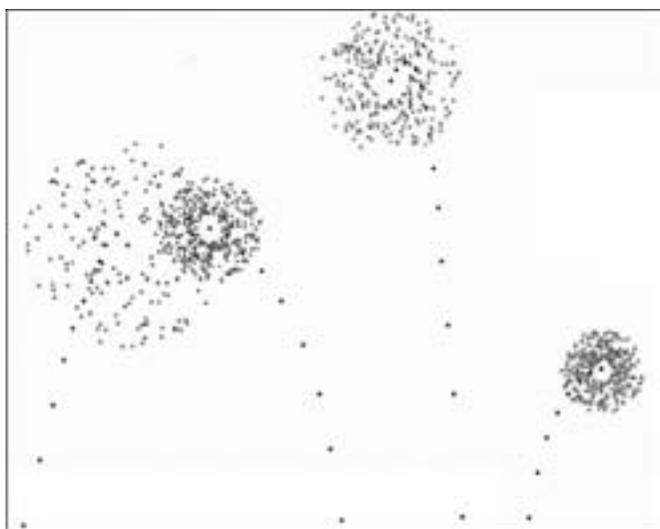


Figura 11: Imagem congelada de todas as partículas geradas em uma simulação de fogos de artifício.

4. *Tendências e Aplicações*

Apesar do enfoque na síntese de fenômenos naturais (Pentland, 1984) apresentada neste artigo, os fractais possuem diversas outras abordagens e aplicações. Dentre estas, destacam-se os estudos teóricos sobre fractais e dimensão fractal (Shinmoto & Takeo, 2003), o uso de fractais para aproximação de funções, aplicações na área econômica e financeira, aplicações tecnológicas e aplicações em biologia e na área de saúde. Algumas destas aplicações serão revistas aqui, mas muitas outras que não serão discutidas neste artigo também estão disponíveis

na literatura, como previsão do tempo (Nicollet *et al.*, 2004; Kurnaz, 2004), música (Sengupta *et al.*, 2005), jogos computacionais (Kim, 2006) e aplicações em biologia (Iannaccone & Khokha, 1996).

Aproximação de Funções

A *regressão* ou *aproximação de funções* modela a relação entre uma ou mais *variáveis de resposta* (também chamadas de variáveis de saída, dependentes, preditas ou explicadas) e os *preditores* (também chamados de variáveis de controle, dependentes, explanatórias, ou regressores). Em linhas gerais a regressão corresponde ao problema de estimar uma função a partir de exemplos de estímulo-resposta (entrada-saída). Em análise numérica, *interpolação* é um método de construção de novos pontos de dados a partir de um conjunto discreto de pontos conhecidos. Trata-se de um caso específico de aproximação de funções (regressão), onde a função deve passar exatamente pelos pontos a serem aproximados (interpolados). Fractais têm sido amplamente usados como interpoladores de função e seus aspectos teóricos são alvo de intensas pesquisas (Barnsley, 1986; Navascués & Sebastián, 2004; Chand & Kapoor, 2006).

Área Econômica e Financeira

O estudo de sistemas econômicos está se tornando uma área interdisciplinar, envolvendo pesquisadores de diversas áreas, como economia, matemática, estatística, engenharia, computação e física. Dentre os tópicos de investigação de maior interesse destacam-se a flutuação de preços em mercados (abertos), a distribuição de renda de empresas, as flutuações das relações de escala das empresas, a análise financeira de mercados e taxas cambiais e a análise de mercados futuros (Kim & Yoon, 2003). O uso da teoria de fractais nas áreas econômica e financeira vem ganhando força ao longo dos últimos anos e vem mostrando ser capaz de apresentar resultados em alguns casos superiores aos obtidos pelas técnicas alternativas (Peters, 1994; Kim & Yoon, 2003; Matia *et al.*, 2003; Mandelbrot & Hudson, 2004; Mandelbrot, 2005).

Medicina e Saúde

A teoria e a geometria fractal também tem sido amplamente utilizada na medicina e outras áreas de saúde (Havlin et al., 1995). Ela tem sido empregada, por exemplo, na análise de batimentos cardíacos (Meyer *et al.*, 2003; Lin, 2003), em estudos sobre o sistema circulatório (Iversen & Nicolaysen, 1995; Han *et al.*, 2003), sistema nervoso (Balestra *et al.*, 2004; Zietsch & Elston, 2005), análise de patologias no sistema bronco pulmonar (Boxt, 1994) na descrição da arquitetura patológica de tumores (Gross, 1997; Baish & Jain, 2000), identificação de câncer de mama (Lefebvre, 1995; Priebe, 1994), detecção de doenças oftalmológicas (Daxter, 1993), estudos sobre o mal de Alzheimer (Nagao, 2001; Woyshville, 1994) dentre outros.

Aplicações Tecnológicas

As aplicações de fractais na área tecnológica são variadas, mas algumas em particular têm recebido especial atenção nos últimos anos. Como exemplos, podemos citar a descoberta de conhecimentos em base de dados – *knowledge discovery and data mining* – (Kostoff *et al.*, 2004; Loocke, 2004), o projeto de antenas (Cohen, 1997; Yang *et al.*, 1999; Song *et al.*, 2004), compressão e processamento de imagens (Keller *et al.*, 1989; Barnsley & Hurd, 1992; Jacquin, 1993; Fisher, 1995; Saupe & Hamzaoui, 1996; Wohlberg & de Jager, 1999), construção de circuitos digitais (Lazareck, 2001).

5. Discussão

A geometria fractal é baseada em uma forma de simetria que corresponde à invariância sob contração e dilação. Os fractais matemáticos e naturais são formas cuja rugosidade e fragmentação não desaparecem e nem flutuam, permanecendo essencialmente constantes quando é feito um aumento (*zoom in*) ou diminuição (*zoom out*) da visualização da imagem. Outra característica importante da geometria fractal ilustrada neste artigo, é que os algoritmos empregados para criar os fractais são tipicamente muito simples, enquan-

to as formas resultantes podem ser arbitrariamente complexas (ver, por exemplo, a Figura 8 e a Figura 10). Em princípio, era de se esperar que a construção de formas complexas fosse necessitar regras ou algoritmos complexos. Assim, a geometria fractal pode ser entendida como uma *linguagem geométrica*, que pode ser empregada para estudar diversos aspectos de objetos, matemáticos e naturais, que não são suaves, mas que apresentam mesmo grau de rugosidade e fragmentação em diferentes escalas (Mandelbrot, 1989).

A importância da geometria fractal reside no fato de que ela descreve uma área diretamente relevante para o estudo da natureza e de muitos outros contextos, como engenharia, medicina e ciências fundamentais. Portanto, ela é peça chave para o entendimento do mundo em que vivemos, de tudo que está ao nosso redor e dentro de nós. A síntese computacional de formas naturais utilizando a geometria fractal representa uma poderosa ferramenta de análise e estudo de formas naturais. Sintetizando computacionalmente fenômenos naturais podemos entender melhor quais são as regras que determinam as complexas formas e comportamentos dos objetos naturais. Estudar a geometria fractal significa compreender melhor como a natureza se organiza e resolve seus problemas. Um bom exemplo disto é o corpo humano. Poucas partes do corpo têm uma estrutura regular como, por exemplo, o globo ocular, a sua maior parte possui uma característica fractal. Os vasos sanguíneos não chegariam a cada pequena parte do nosso corpo se não tivessem estruturas fractais. O cérebro organiza suas conexões de forma fractal de modo a otimizar o espaço em que ele ocupa, a mesma coisa acontece com os brônquios dos pulmões que se ramificam de forma a maximizar a absorção do ar.

Fractais têm se mostrado uma ferramenta importante em diversas áreas da ciência, como astronomia (Heck & Perdang, 1991), biologia (Havlin *et al.*, 1995), medicina (Havlin *et al.*, 1995), economia (Mandelbrot & Hudson, 2004), computação gráfica (Peitgen *et al.*, 1988; Ng, 2005), física (Jean-Fraçois, 1997), e muitas outras. Este artigo buscou apresentar não só os fundamentos da geometria fractal

e sua aplicação à síntese de fenômenos naturais, como também sua aplicabilidade nos mais diversos contextos, sempre com o objetivo de alertar o leitor para a importância de se estudar esta nova área, que certamente ainda tem muito a oferecer graças à sua profunda relação com a natureza. A vasta gama de aplicações nas mais diversas áreas que hoje já estão sendo pesquisadas mostra que a geometria fractal não é apenas uma área promissora, mas sim uma realidade.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à Fapesp pelo apoio financeiro.

Referências Bibliográficas

- BAISH, J. W. & Jain, R. K. Fractals and Cancer. *Cancer Research*, **60**, pp. 3683–3688, 2000.
- BALESTRA, C., Marroni, A., Farkos, B., Peetrons, P., Vanderschueren, F., Duboc, E., Snoeck, T. & Germonpré, P. The Fractal Approach as a Tool to Understand Asymptomatic Brain. *Fractals*, **12**(1), pp. 67–72, 2004.
- BARNSLEY, M. F. Fractal functions and interpolation. *Journal Constructive Approximation*, **2**(1), pp. 303–329, 1986.
- BOXT L. M., Katz J., Leibovitch L. S., Jones R., Esser P. D. & Reid L. Fractal analysis of pulmonary arteries: The fractal dimension is lower in pulmonary hypertension. *Journal of Thoracic Imaging*, **9**(1), pp. 8–13, 1994.
- CHAND, A. K. B. & Kapoor, G. P. Generalized cubic spline fractal interpolation functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **44**(2), pp. 655–676, 2006.
- COHEN, N. Fractal Antenna Applications in Wireless Telecommunications. *IEEE Proc. Professional. Program Electronics Industry Forum*, pp. 43–49, 1997.
- CROSS, S. S. Fractals in Pathology, *Journal of Pathology*, **182**, pp. 1–8, 1997.
- DAXER A. Characterisation of the neovascularisation process in diabetic retinopathy by means of fractal geometry: Diagnostic implications. *Graefe's Arch Clin Exp Ophthalmol*, **231**, pp. 681–686, 1993.

- FLAKE, G. W. *The computational beauty of nature*, MIT Press, 1998.
- Fisher, Y. *Fractal image compression*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- HAHN, H. K., Evertsz, C. J. G., Fasel, J. H. D. & Peitgen, H. O. Fractal Properties Segment Anatomy and Interdependence of the Human Portal Vein and the Hepatic Vein in 3D. *Fractals*, **11**, pp. 53-62, 2003.
- HAVLIN S., Buldyrev S.V., Goldberger A.L., Mantegna R.N., Ossadnik S.M., Peng C.K., Simon M. & Stanley H. E. Fractals in Biology and Medicine. *Chaos Solitons & Fractals*, **6**, pp. 171-201, 1995.
- HECK, A. & Perdang, J. M. *Applying Fractals in Astronomy*, Springer-Verlag, 1991.
- HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, **30**(5), pp. 713–747, 1981.
- IANNACCONE, P. M. & Khokha, M. *Fractal Geometry in Biological Systems*, CRC Press, 1996.
- IVERSEN P. O. & Nicolaysen G. Fractals describes blood flow heterogeneity within skeletal muscle and within myocardium. *American Journal of Physiology*, **268**, pp. H112–H116, 1995.
- JACQUIN, A.E. Fractal image coding: A review. *Proceedings of the IEEE*, **81**(10), pp. 1451-1465, 1993.
- JEAN-FRANÇOIS GOUYET & AMY L. R. Physics and Fractal Structures. *American Journal of Physics*, **65**(7), pp. 676-677, 1997.
- KELLER, J. M., Chen, S., and Crownover, R. M. Texture description and segmentation through fractal geometry. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, **45**, pp. 150-166, 1989.
- KIM K. & Yoon S.-M. Dynamical behavior of continuous tick data in futures exchange market. *Fractals*, **11**, pp. 131–136, 2003.
- KIM, S. Player's Positional Dependence of Fractal Behaviors in a Soccer Game. *Fractals*, **14**(1), pp. 71-76, 2006.
- KOSTOFF, R. N., Shlesinger, M. F. & Malpohl, G. Fractals text mining using bibliometrics and database tomography. *Fractals*, **12**(1), pp. 1-16, 2004.
- KURNAZ, M. L. Application of Detrended Fluctuation Analysis to Monthly Average of the Maximum Daily Temperatures to Resolve Different Climates. *Fractals*, **12**(4), pp. 365-373, 2004.

- LAZARECK, L. Verch, G. & Peter, A. F. Fractals in circuits. *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2001.
- LESMOIR-GORDON, N., Rood, W. & Edney, R. *Introducing Fractal Geometry*, ICON Books UK, 2000.
- LIN D. C. Model the fractal component in heart rate variability as a dyadic bounded cascade. *Fractals*, **11**, pp. 63-76, 2003.
- LINDENMAYER, A. Mathematical Models for Cellular Interaction in Development, Parts I and II. *Journal of Theoretical Biology*, **18**, pp. 280–315, 1968.
- LEFEBRE F., BENALI H., Gilles R., Kahn E. & Di Paola R. A fractal approach to the segmentation of microcalcification in digital mammograms. *Med Phys*, **22**, pp. 381–390, 1995.
- LOOCKE, P. V. Visualization of Data on Basis of Fractal Growth. *Fractals*, **12**(1), pp. 123-136, 2004.
- M. F. BARNESLEY & L. P. Hurd. *Fractal image compression*, A. K. Peters, Boston, 1992.
- MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, 1983.
- MANDELBROT, B. B. Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica Scripta*, **32**, p.257-260, 1985.
- MANDELBROT, B. B. Fractal Geometry: What Is It, and What Does It Do? *Proc. of the Royal Society of London A*, **423**, pp. 3-16, 1989.
- MANDELBROT, B. B. & Hudson, R. L. *The (Mis)behavior of Markets - A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books, 2004.
- MANDELBROT, B. B. *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, 2005.
- MANDELBROT, B. B. & van Ness, J. W. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, **10**(4), pp. 422–437, 1968.
- MATIA K., Ashkenazy Y. & Stanley H. E. Multifractal properties of price fluctuations of stock and commodities. *Europhysics Letters*, **61**, pp. 422-428, 2003.
- MEYER, M., Stiedl, O. & Kerman, B. Discrimination by Multifractal Spectrum Estimation of Human Heartbeat. *Fractals*, **11**(2), pp. 195–204, 2003.

- NAGAO, M., Murase, K., Kikuchi, T., Ikeda, M., Nebu, A., Fukuhara, R., Sugawara, Y., Miki, H., Ikezoe, J. **Fractal Analysis of Cerebral Blood Flow Distribution in Alzheimer's Disease.** *J Nucl Med*, **42**, pp. 1446-1450, 2001.
- NG, T., Chang, S., Hsu, J., Xie, L. & Tsui, M. Physics-motivated features for distinguishing photographic images and computer graphics. *Proceedings of the 13th Annual ACM international Conference on Multimedia*, pp. 239-248, 2005.
- NAVASCUÉS, M. A. & Sebastián, M. V. Generalization of Hermite functions by fractal interpolation. *Journal of Approximation Theory*, **131**(1), pp. 19-29, 2004.
- NICOLLET, M., Lemarchand, A. & Cavaciuti, N. Detection of atmospheric turbulence by multifractal analysis using wavelets. *Fractals*, **12**(2), pp. 211-221, 2004.
- PEITGEN, H.-O & Saupe, D. *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, 1988.
- PENTLAND A. P. Fractal-based description of natural scenes”, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, pp. 661-674, 1984.
- PRIEBE C. E., Solka J. L., Lorey R. A. et al. The application of fractal analysis to mammographic tissue classification”, *Cancer Lett*, **77**, pp. 83-189, 1994.
- PRUSINKIEWICZ, P. & Lindenmayer, A. *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, 1990.
- REEVES, W. T. Particle Systems - A Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects. *ACM Transactions on Graphics*, **2**(2), pp. 91-108, 1983.
- ROOM, P., Hanan, J. & Prusinkiewicz, P. Virtual Plants: New Perspectives for Ecologists, Pathologists and Agricultural Scientists, *Trends in Plant Science*, **1**(1), pp. 33-38, 1996.
- SAUPE, D. & Hamzaoui, R. *A bibliography for fractal image compression*. Institut für Informatik, Universität Freiburg, Germany. Available as <ftp://www.informatik.uni-freiburg.de/documents/papers/fractal/biblio.ps.gz>, 1996.
- SENGUPTA, R., Dey, N., Datta, A. K. & Ghosh, D. Assessment of Musical Quality of Tanpura by Fractal-Dimensional Analysis. *Fractals*, **13**(3), pp. 245-252, 2005.

- SHINMOTO, J. & Takeo, F. The Hausdorff Dimension of Sub-Self-Similar Sets, *Fractals*, 11(1), pp. 9-18, 2003.
- SIMS, K. Artificial Evolution for Computer Graphics. *Computer Graphics*, 25(4), pp. 319–328, 1991.
- SMITH, A. R. Plants, Fractals, and Formal Languages. *Computer Graphics*, 18(3), pp. 1–10, 1984.
- SONG, C. T. P., Hall, P. S. & Ghafouri-Shiraz, H. Shorted fractal Sierpinski monopole antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(10), pp. 2564-2570, 2004.
- SZILARD, A. L. and Quinton, R. E. An Interpretation for DOL systems by Computer Graphics. *The Science Terrapin*, 4, pp. 8–13, 1979.
- WOHLBERG, B. & De Jager, G. A review of the fractal image coding literature. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(12), pp. 1716-1729, 1999.
- WOYSHVILLE M. J., Calabrese J. R. Quantification of occipital EEG changes in Alzheimer's disease utilizing a new metric: the fractal dimension. *Biol Psych*, 35, pp. 381–387, 1994.
- YANG, X., Chiocetti, J., Papadopoulos, D. & Sussman, L. Fractal Antenna Elements and Arrays. *Applied Microwave & Wireless*, 11(5), pp. 34-46, 1999.
- ZIETSCH, B. & Elston, G. N. Fractal Analysis of Pyramidal Cells in the Visual Cortex of the Galago (*Otolemur Garnetti*): Regional Variation in Dendritic Branching Patterns Between Visual Areas. *Fractals*, 13(2), pp. 83-90, 2005.